Diseñar tubería simple usando la ecuación de Darcy-Weisbach

Carlos Camacho

November 2024

Diseñar una tubería consiste en definir el diámetro requerido para que tenga la capacidad debe llevar un caudal dado. Para el diseño se debe conocer: la diferencia topográfica H de la cual se dispone, el material de la tubería a usar, es decir su rugosidad K_s, la longitud de la tubería L, el caudal de diseño Q_d y el coeficiente de pérdidas locales K_L, la aceleración de la gravedad g y la viscosidad cinemática del fluido ν.

Método de cálculo de diámetro exacto

A continuación se desarrolla una metodología para calcular el diámetro exacto de la tubería que se requiere, mediante iteraciones.

Se inicia suponiendo un diámetro D_i, cuyo valor se irá usando como base para cada iteración. A partir de D_i se obtiene el área de la sección transversal de dicha tubería con:

$$A_i = \frac{\pi {D_i}^2}{4} \tag{1}$$

Con el área definida, se puede obtener la velocidad del flujo en esa tubería de acuerdo con la siguiente expresión:

$$v_i = \frac{4Q_d}{\pi {D_i}^2} \tag{2}$$

Recordando que la expresión para el número de Reynolds R_e, necesario para calcular el factor de fricción f, está dada por: $R_e = \frac{vD}{\nu}$, y sustituyendo la expresión anterior de velocidad en esta ecuación, se obtiene la siguiente expresión:

$$R_{ei} = \frac{4Q_d}{\pi D_i \nu} \tag{3}$$

El factor de fricción se calcula con la ecuación de Colebrook-White o con la ecuación aproximada de Swamee-Jain. La ecuación de Colebrook-White, requiere también de un proceso iterativo con punto fijo; por esta razón, en este método se usará la ecuación de Swamee-jain:

$$f_i = \frac{0{,}25}{\Big(\log(\frac{K_s}{3{,}7D_i} + \frac{5{,}74}{(R_e)^{0{,}9}})\Big)^2} \tag{4}$$

Una vez obtenido el valor de la f para la ecuación de Darcy-Weisbach, se obtienen los correspondientes valores de los módulos de caudal para las pérdidas por fricción y las pérdidas locales:

$$M_f = \frac{8}{\pi^2 g}\frac{f_i L}{{D_i}^5} \tag{5}$$

$$M_L = \frac{8}{\pi^2 g}\frac{K_L}{{D_i}^4} \tag{6}$$

Sumando estos dos módulos obtenemos el módulo de caudal total para la tubería que estamos diseñando, correspondiente a esta iteración.

$$M_i = \frac{8}{\pi^2 g}\Big(\frac{f_i L}{{D_i}^5} + \frac{K_L}{{D_i}^4}\Big) \tag{7}$$

Lo que se puede reacomodar como:

$$M_i = \frac{8}{\pi^2 g {D_i}^4}\Big(\frac{f_i L}{D_i} + K_L\Big) \tag{8}$$

Las pérdidas de energía, que corresponden a la carga total H están dadas por:

$$H = M \cdot Q^2 \tag{9}$$

Por lo que el caudal asociado al módulo de caudal de esta iteración, se obtiene con:

$$Q_i = \sqrt{\frac{H}{M_i}} \tag{10}$$

Cuando se haya obtenido el diámetro, este caudal Q_i debería ser igual al caudal de diseño Q_d. Si no son iguales, se debe hacer la corrección del diámetro para la iteración $i+1$. A partir de ese caudal calculado en esta iteración, se obtiene la velocidad a partir del caudal y el area calculados en la actual iteración, mediante:

$$v_i = \frac{Q_i}{A_i} \tag{11}$$

El valor del diámetro a usar en la siguiente iteración se debe ajustar de manera que permita pasar el caudal de diseño con esa velocidad recién obtenida, es decir:

$$Qd = v_i \cdot A_{i+1} = v_i \cdot \frac{\pi {D_{i+1}}^2}{4} \tag{12}$$

De modo que el nuevo diámetro será:

$$D_{i+1} = \sqrt{\frac{4Q_d}{v_i \pi}} \tag{13}$$

i	D_i	A_i	Re_i	f_i	M_f	M_L	M	Q_i	v_i	D_{i+1}
1										
2										
3										
...										

Cuadro 1: Formulario de cálculo de diámetro

Se repite la iteración de todos estos cálculos, con el nuevo valor de diámetro, hasta que el diámetro converja y también converja el caudal en $Q_i = Q_d$.

Se muestra el cuadro 1 con un formato que puede ser usado para realizar el diseño de la tubería.

Ejemplo de cálculo paso a paso

Para ejemplificar el uso de este método se propone el siguiente ejemplo. Diseñar una tubería con los siguientes datos:

- $Q_d = 200\ l/s$
- $L = 1250m$
- $H = 24m$
- Material: PVC, $K_s = 0{,}0015mm$
- Coeficiente de pérdidas locales $K_L = 2{,}5$
- $g = 9{,}81m/s^2$
- $\nu = 1{,}007e^{-6}m^2/s$

Para iniciar los cálculos se inicia con un díametro $D_1 = 0{,}3m$ ($300mm$). Con la ecuación (1) se calcula el área:

$$A_1 = \frac{\pi * 0{,}3^2}{4} = 0{,}070685835m^2$$

Luego con la ecuación (3) se calcula el número de Reynolds:

$$Re_1 = \frac{4 * 0{,}2}{\pi \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}000001007} = 842925{,}9$$

Luego, utilizando la ecuación (4) obtenemos el factor de fricción f:

$$f_1 = \frac{0{,}25}{\left(\log(\frac{0{,}0000015}{3{,}7 \cdot 0{,}3} + \frac{5{,}74}{(842925{,}9)^{0{,}9}})\right)^2} = 0{,}012060897$$

Ahora se obtiene el valor de los módulos de caudal, para las pérdidas por fricción como para las pérdidas locales y luego se suman, ecuaciones (5) y (6):

$$M_f = \frac{8}{\pi^2 9{,}81} \frac{0{,}012060897 \cdot 1250}{0{,}3^5} = 512{,}65$$

$$M_L = \frac{8}{\pi^2 9{,}81} \frac{2{,}5}{0{,}3^4} = 25{,}50$$

$$M_1 = 512{,}65 + 25{,}50 = 538{,}15$$

Una vez obtenido el módulo de caudal podemos despejar el caudal y velocidad asociados al diámetro usado en esta iteración, con las ecuaciones (10) y (11):

$$Q_1 = \sqrt{\frac{24}{538{,}15}} = 0{,}211179924 m^3/s = 211{,}18 l/s$$

$$v_1 = \frac{0{,}211179924}{0{,}070685835} = 2{,}987584786 m/s$$

Note que el caudal obtenido es superior al caudal de diseño, lo que implica que en la primera iteración se probó con un diámetro superior al requerido. Se debe ajustar el diámetro y realizar la siguiente iteración.

$$D_{i+1} = D_2 = \sqrt{\frac{4 \cdot 0{,}2}{2{,}987584786 \cdot \pi}} = 0{,}29195098 m = 291{,}95 mm$$

Esta iteración y las siguientes se muestran en el cuadro 2.

i	D_i	A_i	Re_i	f_i	M_i	Q_i	v_i
1	0.30000	0.07069	842925.9	0.01206	538.15	0.21118	2.988
2	0.29195	0.06694	866165.2	0.01201	613.31	0.19782	2.955
3	0.29356	0.06768	861427.3	0.01202	597.35	0.20044	2.962
...	...	...	...	...	...	...	...
11	0.29329	0.06756	862221.3	0.01202	600.00	0.20000	2.960

Cuadro 2: Iteraciones del ejemplo

A partir de la iteración #3 se tenía un valor muy cercano al caudal de $200 l/s$. Esto ocurrió porque el diámetro inicial de $300 mm$ fue muy cercano al resultado final. Si se escoge un diámetro más alejado, se tendrá que hacer algunas iteraciones más. Se puede ver que se necesitaron 11 iteraciones para que el caudal cerrara exacto, pero ya en términos generales se tenía un buen valor para el diámetro.

En la tabla no se muestran todos los decimales usados en el cálculo. La hoja electrónica montada para el ejemplo si contempla todos las cifras. Por comodidad visual tampoco se muestran las columnas correspondientes a los módulos de caudal por fricción ni por pérdidas locales, solamente la suma de ellos; y tampoco la columna correspondiente al nuevo diámetro, ya que vuelve a aparecer en la columna de diámetro.

Resultado

- $Q_d = 200\ l/s$
- $L = 1250m$
- $H = 24m$
- Material: PVC, $K_s = 0{,}0015mm$
- Coeficiente de pérdidas locales $K_L = 2{,}5$
- $g = 9{,}81m/s^2$
- $\nu = 1{,}007e^{-6}m^2/s$
- Diámetro exacto: $D = 293{,}3mm$

Método de cálculo simplificado

Se pueden integrar las ecuaciones anteriormente descritas en una única ecuación simplificada, en la cual se pueda hacer el cálculo del diámetro de la siguiente iteración en un solo paso. La ecuación resultante no tiene una apariencia elegante ni cómoda de usar, sin embargo, se puede meter una única vez en la calculadora y resolver para cada caso, sustituyendo el valor del diámetro por el nuevo. Así la solución del ejercicio es más eficiente.

Empezamos sustituyendo la ecuación (3) dentro de la ecuación (4): de manera que ahora nos queda que el factor de fricción es:

$$f_i = \frac{0{,}25}{\left(\log(\frac{K_s}{3{,}7D_i} + \frac{5{,}74}{(\frac{4Q_d}{\pi D_i \nu})^{0{,}9}})\right)^2} \tag{14}$$

Por otro lado, si sustituimos la ecuación (8) dentro de la ecuación (10), obtenemos que el caudal está dado por:

$$Q_i = \sqrt{\frac{H}{\frac{8}{\pi^2 g {D_i}^4}\left(\frac{f_i L}{D_i} + K_L\right)}} \tag{15}$$

Reacomodando los términos se tienen estas dos posibilidades:

$$Q_i = \sqrt{\frac{\pi^2 g {D_i}^4 H}{8\left(\frac{f_i L}{D_i} + K_L\right)}} \tag{16}$$

$$Q_i = \pi {D_i}^2 \sqrt{\frac{gH}{8\left(\frac{f_i L}{D_i} + K_L\right)}} \tag{17}$$

Luego, sustituyendo la ecuación (17) dentro de la (11, la velocidad queda:

$$v_i = \frac{\pi {D_i}^2 \sqrt{\frac{gH}{8\left(\frac{f_i L}{D_i} + K_L\right)}}}{\frac{\pi {D_i}^2}{4}} \tag{18}$$

Otra vez, luego de hacer los dos siguientes reacomodos se tiene:

$$v_i = 4\sqrt{\frac{gH}{8\left(\frac{f_i L}{D_i} + K_L\right)}} \tag{19}$$

$$v_i = \sqrt{\frac{2gH}{\left(\frac{f_i L}{D_i} + K_L\right)}} \tag{20}$$

Sustituyendo la anterior expresión para la velocidad dentro de la ecuación (13), tenemos:

$$D_{i+1} = \sqrt{\frac{4Q_d}{\pi \sqrt{\frac{2gH}{\left(\frac{f_i L}{D_i} + K_L\right)}}}} \tag{21}$$

Se puede reacomodar la ecuación de la siguiente manera:

$$D_{i+1} = \sqrt{\frac{4Q_d}{\pi} \sqrt{\frac{\left(\frac{f_i L}{D_i} + K_L\right)}{2gH}}} \tag{22}$$

Esta ecuación está en términos de f_i, por lo tanto debemos sustituir la ecuación (14) dentro de la ecuación (22):

$$D_{i+1} = \sqrt{\frac{4Q_d}{\pi} \sqrt{\frac{\left(\left(\frac{0{,}25}{\left(\log(\frac{K_s}{3{,}7D} + \frac{5{,}74}{(\frac{4Q}{\pi D \nu})^{0{,}9}})\right)}\right)^2 \frac{L}{D} + K_L\right)}{2gH}}} \tag{23}$$

Finalmente obtenemos la siguiente ecuación, que permite calcular el siguiente diámetro para la tubería, partir del diámetro obtenido en la iteración anterior:

$$D_{i+1} = \sqrt{\frac{4Q_d}{\pi\sqrt{2gH}}} \cdot \left(\frac{0{,}25L}{D \cdot \log(\frac{K_s}{3{,}7D} + \frac{5{,}74}{(\frac{4Q}{\pi D \nu})^{0{,}9}})^2} + K_L\right)^{\frac{1}{4}} \tag{24}$$

Procedimiento de cálculo con ecuación de un solo paso

El procedimiento para usar esta expresión es el siguiente:

1. Se define un diámetro inicial D_1, no importa el valor. Es preferible andar cerca del resultado así serán menos las iteraciones necesarias.
2. Con la ecuación (24) se obtiene el valor del diámetro siguiente D_{i+1}
3. Se comparan los diámetro D_i con D_{i+1}. Si son iguales entonces ya se ha hayado el resultado.
4. Si no son iguales los diámetros se realiza una nueva iteración.

Ejemplo con los mismos datos del anterior

- $Q_d = 200\ l/s$
- $L = 1250m$
- $H = 24m$
- Material: PVC, $K_s = 0{,}0015mm$
- Coeficiente de pérdidas locales $K_L = 2{,}5$
- $g = 9{,}81m/s^2$
- $\nu = 1{,}007e^{-6}m^2/s$

Se define el diámetro inicial, $D_1 = 200mm$, es decir $D_1 = 0{,}200m$. Se sustituyen los valores de Q_d, H, L, ν, g, K_s y K_L en la ecuación (24), para realizar la primera iteración:

$$D_2 = \sqrt{\frac{4 \cdot 0{,}2}{\pi\sqrt{2 \cdot 9{,}81 \cdot 24}}} \cdot \left(\frac{0{,}25 \cdot 1250}{0{,}2 \cdot \log(\frac{0{,}0000015}{3{,}7 \cdot 0{,}2} + \frac{5{,}74}{(\frac{4 \cdot 0{,}2}{\pi \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}000001007})^{0{,}9}})^2} + 2{,}5\right)^{\frac{1}{4}}$$

$$D_2 = 0{,}317302m$$

Al comparar los diámetros es evidente que $D_2 \neq D_1$. Se debe repetir el cálculo, ahora con el nuevo diámetro.

$$D_3 = \sqrt{\frac{4 \cdot 0{,}2}{\pi\sqrt{2 \cdot 9{,}81 \cdot 24}}} \cdot \left(\frac{0{,}25 \cdot 1250}{0{,}2 \cdot \log(\frac{0{,}0000015}{3{,}7 \cdot 0{,}317302} + \frac{5{,}74}{(\frac{4 \cdot 0{,}2}{\pi \cdot 0{,}317302 \cdot 0{,}000001007})^{0{,}9}})^2} + 2{,}5\right)^{\frac{1}{4}}$$

$$D_3 = 0{,}2888678m$$

Los diámetros aún no coinciden, por lo tanto se debe seguir iterando. El cuadro 3 muestra los resultados.

i	D_i	D_{i+1}
1	0.200	0.317302
2	0.317302	0.288868
3	0.288868	0.294223
4	0.294223	0.293095
5	0.293095	0.293322
6	0.293322	0.293276

Cuadro 3: Iteraciones del ejemplo método de un solo paso

Luego de 6 iteraciones ya se tiene el mismo resultado obtenido en el ejercicio anterior $D = 293{,}3mm$. En este caso se seleccionó un valor inicial de díametro diferente al del ejercicio anterior, para confirmar que en no hay un aumento significativo en la cantidad de iteraciones.